Početní část 1 - 8.7.2021

1. Jedná se o rovnici s konstantními koeficienty. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 = 0$ má dvojnásobný kořen -1. Fundamentální systém je tedy $\{e^{-x}, e^{-x}x\}$.

   Vidíme, že pravá strana není ve speciálním tvaru. Dále postupujeme variací konstant. Řešíme tedy soustavu rovnic

$$u'e^{-x} + v'xe^{-x} = 0$$
$$-u'e^{-x} + v'(1-x)e^{-x} = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$$

   pro neznámé funkce u, v, což můžeme přepsat jako maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{x} \cdot e^{-x} \end{pmatrix}.$$

   Z Cramerova pravidla tedy dostaneme

$$u' = e^{2x} \begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ \sqrt{x} \cdot e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{x}\sqrt{x} \cdot e^{-x} = -x^{\frac{3}{2}},$$
$$v' = e^{2x} \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \sqrt{x} \cdot e^{-x} \end{vmatrix} = e^{x}\sqrt{x} \cdot e^{-x} = \sqrt{x}.$$

   Integrací obou rovnic per partes získáme

$$u = -\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}},$$
$$v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}.$$

   Partikulární řešení tedy bude mít tvar

$$ue^{-x} + vxe^{-x} = -\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}e^{-x} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}xe^{-x} = \frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}}e^{-x}$$

   Obecné řešení je tedy tvaru

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}}e^{-x},$$

   kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a $x \in (0, \infty)$.

2. Začneme s vyšetřením absolutní konvergence. Položme

$$a_n = \frac{(n!)^3}{(3n)! \sin\left(\frac{1}{26^n}\right)}.$$

Použijeme podílové kritérium, máme

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{((n+1)!)^3}{(3n+3)! \sin\left(\frac{1}{26^{n+1}}\right)}}{\frac{(n!)^3}{(3n)! \sin\left(\frac{1}{26^n}\right)}} = \frac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{26^n}\right)}{\frac{1}{26^n}} \cdot \frac{\frac{1}{26^{n+1}}}{\sin\left(\frac{1}{26^{n+1}}\right)} \cdot 26$$

$$= \frac{1}{27} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 26 = \frac{26}{27} < 1.$$

Řada tedy konverguje absolutně podle podílového kritéria a tedy i konverguje. Poznamenejme, že jsme při výpočtu limit použili Heineho větu a známou limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.